ПОД- СЕКЦИЯ 6. Математика.

Бак С. М.
кандидат фізико-математичних наук
Вінницький державний педагогічний університет

ПРО ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ’ЯЗКИ СИСТЕМИ ОСЦИЛЯТОРІВ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Вивчаються рівняння, які описують динаміку нескінченної системи лінійно зв’язаних нелінійних осциляторів, розміщених на плоскій цілочисловій ґратці:

$$\begin{aligned}\ddot{q}_{n,m}(t) &= a_{n-1,m}\left(q_{n-1,m}(t)-q_{n,m}(t)\right)-a_{n,m}\left(q_{n,m}(t)-q_{n+1,m}(t)\right)+\\ &+b_{n,m-1}\left(q_{n,m-1}(t)-q_{n,m}(t)\right)-b_{n,m}\left(q_{n,m}(t)-q_{n,m+1}(t)\right)-\\ &-U'_{n,m}\left(q_{n,m}(t)\right),\ (n,m)\in\mathbb{Z}^2,\end{aligned}$$

(1)

де $q_{n,m}(t)$ – узагальнена координата (n , m)-го осцилятора в момент часу t. Розглядаються такі розв'язки системи (1), які задовльняють умову

$$\lim_{n,m\to\pm\infty} q_{n,m}(t)=0, \quad (2)$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Подібні системи є цікавими з огляду на численні застосування у фізиці [5], [6], [7]. В статтях [1], [4], [8] вивчались біжучі хвилі в системах лінійно зв’язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірних ґратках, а в статті [2] і [3] – питання коректності задачі Коші для таких систем.

Розглядається система з потенціалом $U_{n,m}(r)=-\dfrac{d_{n,m}}{2}r^2+V_{n,m}(r)$. Система (1) набуде вигляду

$$\begin{aligned}\ddot{q}_{n,m} &= a_{n-1,m}q_{n-1,m}+a_{n,m}q_{n+1,m}+b_{n,m-1}q_{n,m-1}+b_{n,m}q_{n,m+1}+\\ &+c_{n,m}q_{n,m}-V'_{n,m}\left(q_{n,m}\right),\ \ (n,m)\in\mathbb{Z}^2,\end{aligned}$$

(3)

де $c_{n,m} = d_{n,m} - a_{n-1,m} - a_{n,m} - b_{n,m-1} - b_{n,m}$. Враховуючи умову (2), це рівняння будемо розглядати як диференціально-операторне рівняння в просторі l_2 дійсних послідовностей $q = \{q_{n,m}\}$:

$$\ddot{q} = Aq - B(q), \qquad (4)$$

де

$$(Aq)_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + c_{n,m}q_{n,m},$$

$$(B(q))_{n,m} = V'_{n,m}(q_{n,m}).$$

За допомогою теореми про гірський перевал ([4, с. 162; 10, с. 12]) і методу періодичних апроксимацій одержано наступний результат:

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

(i) коефіцієнти $a_{n,m}, b_{n,m}, c_{n,m}$ *є N-періодичними, тобто*

$a_{n+N,m} = a_{n,m+N} = a_{n,m}$, $b_{n+N,m} = b_{n,m+N} = b_{n,m}$,

$c_{n+N,m} = c_{n,m+N} = c_{n,m}$, *і оператор A – додатно визначений в* l_2, *тобто існує таке* $\alpha_0 > 0$, *що*

$$(Aq, q) \geq \alpha_0 \|q\|^2,\ q \in l_2;$$

(ii) для будь-яких $n, m \in \mathbb{Z}$ *функція* $V_{n,m}(r)$ *– неперервно диференційовна,* $V_{n,m}(0) = V'_{n,m}(0) = 0$ *та* $V'_{n,m}(r) = o(r)$ *при* $r \to 0$, *і виконується умова N-періодичності* $V_{n+N,m}(r) = V_{n,m+N}(r) = V_{n,m}(r)$;

(iii) існує таке μ>2, що $0 < \mu V_{n,m}(r) \leq V'_{n,m}(r)r,\ r \neq 0$.

Тоді для будь-яких T>0 рівняння (4) має ненульовий T-періодичний розв'язок. При цьому існує таке $T_0 > 0$, *що при* $T \geq T_0$ *цей розв'язок не є сталим.*

Література

1. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні студії. – 2011. – Т. 35, №1. – С. 60-65.
2. Бак С. М. Існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання: збірник наукових праць. – 2011. – Вип. 5. – С. 3-9.
3. Бак С. М. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці / С. М. Бак, О. О. Баранова, Ю. П. Білик // Математичне та комп'ютерне моделювання: збірник наукових праць. – 2010. – Вип. 4. – С. 18-24.
4. Бак С. Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний вісник. – 2010. – Т. 7, №2. – С. 154-175.
5. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization / S. Aubry // Physica D. – 1997. – 103. – P. 201-250.
6. Braun O. M. Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar // Physics Repts. – 1998. – 306. – P. 1-108.
7. Braun O. M. The Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar. – Berlin: Springer, 2004. – 427 pp.
8. Feckan M. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions / M. Feckan, V. Rothos // Nonlinearity. – 2007. – 20. – P. 319-341.
9. Friesecke G. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice / G. Friesecke, K. Matthies // Discrete and continuous dynamical systems. – 2003. – Volume 3, №1 (February). – P. 105-114.
10. Willem M. Minimax theorems / M. Willem. – Boston: Birkhäuser. – 1996. – 162 p.