

Крахмалева Ю.Р.

Доцент, кандидат технических наук, кафедра «Прикладная математика» Таразский государственный университет им. М.Х.Дулати, г. Тараз, Казахстан.

Захарова Н.

Студентка 2-го курса, специальность «Математика», Таразский государственный университет им. М.Х.Дулати, г. Тараз, Казахстан.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ БЫСТРО ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ОТКРЫТОГО ПОТОКА

Гипотеза идеальной жидкости позволила в гидродинамике разработать теорию потенциального течения жидкости, которая широко используется для решения многих практических задач. Основное затруднение в использовании потенциальной теории заключается в сложности получения аналитических решений с учетом граничных условий реальных потоков. Тем не менее, имеется ряд аналитических решений для случая быстро изменяющегося течения (распространение уединенной волны, сопряжение потоков прыжком – волной и.т.д), которые могут быть использованы как первое приближение к реальному потоку.

Большинство аналитических решений быстро изменяющегося движения открытого потока получены из уравнений Эйлера для идеальной жидкости с использованием гипотезы Буссинеска о равномерности продольной составляющей скорости по глубине потока $[1, с.4]$. Такая одномерная идеализация может быть использована как первое приближение при численных методах моделирования быстро изменяющихся течений. Дальнейшее уточнение распределения скорости потока по глубине, учет кривизны струй на распределение давления существенно улучшает эту математическую модель быстро изменяющегося движения открытого потока.

Для получения устойчивых решений требуется формулирование уравнений продольного профиля граничной линии тока, имеющих непрерывные производные до второго порядка. Методы последовательных итераций численного моделирования трудоемки и нередко неустойчивы. Поэтому принципы прямого численного моделирования, как нам кажется, являются наиболее перспективными.

Для выбора математической модели, прежде всего, необходимо определить область решаемых задач. В данном случае рассматриваются задачи безвихревого течения жидкости в призматических каналах водопроводящих трактах гидротехнических сооружений. Поэтому считаем, что основные положения потенциального движения жидкости соблюдаются, т.е. для элементарных струек реального потока соблюдается закон Д. Бернулли

$$z_1 + \frac{p_1}{g} + \frac{U_1^2}{2g} = z_i + \frac{p_i}{\gamma} + \frac{U_i^2}{2g} + h_{mp} = \Pi = const \quad (\text{формула 1})$$

и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (2) \quad (\text{формула 2})$$

где z_1, p_1, U_1 - параметры потока в предыдущем створе;
 - скорость потока в рассматриваемой точке по касательной к линии тока в этой точке;

h_{mp} - потери на трение на расчетном участке.

Другими условиями для поверхностных струек, вытекающих из граничных условий, являются:

$$u_z = u_x \frac{dz_p}{dx}, \quad (\text{формула 3})$$

где z_p - уравнение свободной поверхности от принятой плоскости отсчета.

Для решения уравнения свободной поверхности открытого потока в форме (ф.1) необходимо задавать очертания для канала в принятой системе координат. Основным же условием является выражение очертаний дна канала в виде непрерывной аналитической функции, имеющей первую производную.

В частном случае в инженерной практике больше всего принимают дно канала с постоянным уклоном. Тогда дно канала описывается линейным уравнением

$$z_d = i_0 x \quad (\text{формула 4})$$

где i_0 - уклон дна канала.

На свободной поверхности давление $p = p_0 = const$. Учитывая это обстоятельство, из (ф.1)-(ф.3) получим следующую систему уравнений для расчета последующих точек свободной поверхности в конечных разностях в прямоугольной системе координат с горизонтальной осью x :

$$z_{p,i} = \Pi_{i-1} - i_{m,i} dx - \frac{u_{h,i}^2}{2g}, \quad (\text{формула 5})$$

$$\Pi_{i-1} = z_{d,j-1} + h_{j-1} + \frac{u_{h,i-1}^2}{2g}, \quad (\text{формула 6})$$

$$i_{m,j} = \lambda_{d,j} \frac{u_{c,j}^2}{8gh_i}, \quad (\text{формула 7})$$

$$u_{c,j} = \frac{q}{h_j \cos \beta}, \quad (\text{формула 8})$$

$$u_{h,j} = u_{h,x,j} \sqrt{1 + \left(\frac{dz_{p,j}}{dx} \right)^2}, \quad (\text{формула 9})$$

где z_i - отметка свободной поверхности в расчетной точке i ; z_d - отметка дна канала; u_h - полная скорость на свободной поверхности потока; $u_{h,x}$ - продольная составляющая поверхностной скорости; u_c - средняя скорость по сечению на расчетном участке; i_m - уклон трения на расчетном участке; g - ускорение силы тяжести; q - удельный расход; $h_i = z_i - z_{d,i}$ - глубина потока по нормали ко дну канала; β - уклон наклона дна канала к оси координат.
При решении задачи быстро изменяющегося течения в руслах с горизонтальным

дном и близким к горизонтальному $i_0 \langle i_{kr} \cos \beta \approx 1$ система уравнений
(ф.5)- (9) упрощается и приводится к виду:

$$h_i = E_{j-1} + \left(\frac{dz_d}{dx} - i_{m,j} \right) dx - \frac{u_{h,j}^2}{2g}, \quad (\text{формула 10})$$

$$E_{j-1} = h_{j-1} + \frac{u_{h,j-1}^2}{2g}, \quad (\text{формула 11})$$

$$i_{m,j} = \lambda_{d,j} \frac{u_{c,j}^2}{8gh_j} \quad (\text{формула 12})$$

$$u_{c,j} = \frac{q}{h_j}, \quad (\text{формула 13})$$

$$u_{h,j} = u_{h,x,j} \sqrt{1 + \left(\frac{dh_j}{dx} \right)^2}. \quad (\text{формула 14})$$

Для численного решения системы уравнений (ф.10)-(ф.14) необходимо знать первую производную искомой функции и поверхностную скорость потока. В частном случае при течении жидкости в горизонтальном русле или в канале с малым уклоном в первом приближении dh/dx можно определить по следующей формуле:

$$\frac{p - p_0}{\gamma} = h - z + \frac{(h^2 - z^2)q^2}{2gh^3} \left[\frac{d^2h}{dx^2} - \frac{1}{h} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right]. \quad (\text{формула 15})$$

Вторую производную найдем путем дифференцирования зависимости (ф.15). Поверхностную скорость можно определить по зависимости А.А. Турсунова для

остановившейся волны [2,с 30]:

$$u = V_1 \sqrt{1 - \frac{2}{Fr_1}(\eta - 1)} \quad (\text{формула 16})$$

Литература

1. Вагапов Р.И. Методы гидравлического расчета водопроводящих трактов и сооружений открытых оросительных систем при бурном режиме течения: Автореф. ДИС. Док. – М.: МГМИ, 1994. – 44с.
2. Турсунов А.А. Теоретические основы гидравлического расчета береговых безнапорных водосбросов больших плотин: Автореф. дис. док. – Л.: ЛПТИ, 1970. – 30с.