УДК 339.138+330+082
ББК 94
Z 40

Wydawca: Sp. z o.o. «Diamond trading tour»

Druk I oprawa: Sp. z o.o. «Diamond trading tour»

Adres wydawcy I redakcji: Warszawa, ul. Wyszogrodzka,16
e-mail: info@conferenc.pl

Cena (zl.): bezpłatnie

Zbiór raportów naukowych.
Z 40 Zbiór raportów naukowych. „Science - od teorii do praktyki". (29.03.2013 - 31.03.2013) - Sopot: Wydawca: Sp. z o.o. «Diamond trading tour», 2013. - 88 str.
ISBN: 978-83-63620-96-7 (t.8)

Zbiór raportów naukowych. Wykonane na materiałach Miedzynarodowej Naukowi-Praktycznej Konferencji 29.03.2013 - 31.03.2013 roku. Sopot.
Część 8 .

УДК 339.138+330+082
ББК 94

ISBN: 978-83-63620-96-7 (t.8)

SPIS /СОДЕРЖАНИЕ

SEKCJA 16. AGROTECHNOLOGIA. (СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ НАУКИ)

SEKCJA 18. TECHNIKA. (ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ)

SEKCJA 21. FIZYKI I MATEMATYKI. (ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ)

SEKCJA 21. FIZYKI I MATEMATYKI. (ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ)

ПОД- СЕКЦИЯ 6. Математика.

Шевцов А.Н.
кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная математика»
Таразский Государственный университет им. М.Х.Дулати
Айтказина А.М.
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика»
Таразский Государственный университет им. М.Х.Дулати
Абдрахимова А.Н.
студентка 4 курса, спец. «Математика»
Таразский Государственный университет им. М.Х.Дулати

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ НА MAPLE

Понятие функций Ляпунова появилось в связи с развитием теории устойчивости, начало которой положили труды великого русского математика А.М. Ляпунова. За последние годы наблюдается бурный рост этой теории, вызванный потребностями развивающейся техники, в частности, теории автоматического регулирования и управления.

Развитие теории устойчивости движения осуществляется двумя путями: во-первых, расширением круга задач и, во-вторых, созданием новых и усилением уже известных методов исследования. Метод функций Ляпунова (известный также как второй или прямой метод Ляпунова) является одним из наиболее эффективных методов исследования устойчивости, чем вызвано и его широкое применение в теории управления. Значение его далеко не исчерпывается возможностью установления факта устойчивости или неустойчивости исследуемой системы. Удачно построенная функция Ляпунова для конкретной системы позволяет решать целый комплекс задач, которые имеют важное прикладное значение, например, получение оценки изменения регулируемой величины, оценки времени регулирования, оценки качества регулирования, оценки области притяжения (множества всех начальных возмущений, исчезающих во времени), оценки влияния постоянно действующих возмущений и другие.

Функции Ляпунова позволяют решать вопросы устойчивости в "большом", т.е. оценивать область начальных возмущений, не выходящих с течением времени за пределы заданной области. С помощью функций Ляпунова решается проблема существования или отсутствия периодических решений, устанавливается ограниченность и продолжимость всех решений заданной нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В связи с широким применением функций Ляпунова возник вопрос универсальности этого метода. Решением этой задачи занимались Я.П. Персидский, Н.Н. Красовский, Е.А. Барбашин, Я. Курцвейль, Ж.Л. Массера и другие математики [1-7]. Было установлено, что в теории устойчивости этот метод универсален для широкого круга задач. В этой связи возникла задача о методах построения функций Ляпунова. Следует заметить, что известные методы построения функций Ляпунова, разработанные для получения достаточных условий устойчивости, не являются достаточно эффективными, поскольку каждый из них приспособлен для исследования конкретных систем. Поэтому проблему построения функций Ляпунова для нелинейных систем в настоящее время нельзя считать решенной.

Данная работа продолжает исследования вопроса о применении функций Ляпунова к исследованию продолжимости решений дифференциальных уравнений.

В данной работе мы будем рассматривать системы дифференциальных уравнений в нормальной форме.

$$\dot{x}^i = X^i(t, x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad i = 1, \ldots, n, \qquad \text{(ф.1)}$$

Напомним, что система обыкновенных дифференциальных уравнений называется нормальной. В этой системе t --- независимая переменная, $x^1, x^2, \ldots, x^n$ --- неизвестные функции этой переменной, а $X^1, X^2, \ldots, X^n$ --- функции от $n+1$ переменной, заданные на множестве Γ пространства размерности $n+1$, в котором координатами точки являются числа $t, x^1, x^2, \ldots, x^n$. В дальнейшем будем предполагать, что функции

$$X^i(t, x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad i = 1, \ldots, n, \qquad \text{(ф.2)}$$

непрерывны на открытом множестве Γ; также будем предполагать, что их частные производные

$$\frac{\partial X^i(t, x^1, x^2, \ldots, x^n)}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \qquad \text{(ф.3)}$$

существуют и непрерывны на множестве Γ. Следует заметить, что частные производные, непрерывность которых предполагается, берутся только по переменным $x^1, x^2, \ldots, x^n$, а не по независимой переменной t.

Решением системы уравнений (ф.1) называется система непрерывных функций определенных на некотором интервале $r_1 < t < r_2$ и удовлетворяющих системе (ф.1).

$$x^i = \varphi(t), \quad i = 1, \ldots, n, \qquad \text{(ф.4)}$$

Интервал $r_1 < t < r_2$ называется интервалом определения решения (случаи , $r_1 = -\infty$, $r_2 = +\infty$ не исключаются). Считается, что система функций удовлетворяет системе уравнений, если при подстановке в соотношение вместо $x^1, x^2, \ldots, x^n$ функций соотношения превращаются в тождества по t на всем интервале $r_1 < t < r_2$ и чтобы правые части уравнений были определены для всех подставляемых в них значений аргументов. Таким образом, точка с координатами $t, \varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t)$ должна принадлежать множеству Γ для всех значений t на интервале $r_1 < t < r_2$.

Устойчивость по Ляпунову

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = Y(y, t) \tag{ф.5}$$

Выделим некоторое решение $y = f(t)$ системы (ф.5) и назовем его невозмущенным решением.

Решение $y = f(t)$ назовем устойчивым в смысле Ляпунова, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\| y(t_0) - f(t_0) \| < \delta$ следует неравенство $\| y(t) - f(t) \| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$. Здесь через $y(t)$ обозначено любое другое решение системы (ф.5), определяемое начальным условием $y(t_0)$. Решение $y = f(t)$ называется асимптотически устойчивым в смысле Ляпунова, если оно устойчиво в смысле Ляпунова и если существует такое $h > 0$, что при $\| y(t_0) - f(t_0) \| < h$ будем иметь

$$\lim_{t \to \infty} \| y(t) - f(t) \| = 0 \tag{ф.6}$$

Рассмотрим пример:

Решение $x = 0$ уравнения $\dot{x} = x^2$ не является устойчивым ни справа, ни слева, т.к. каждое решение $x=x_0(1-tx_0)^{-1}$, где $x_0 > 0$ ($x_0 < 0$), перестает существовать при $t = t_0^{-1}$ (рис. 1).

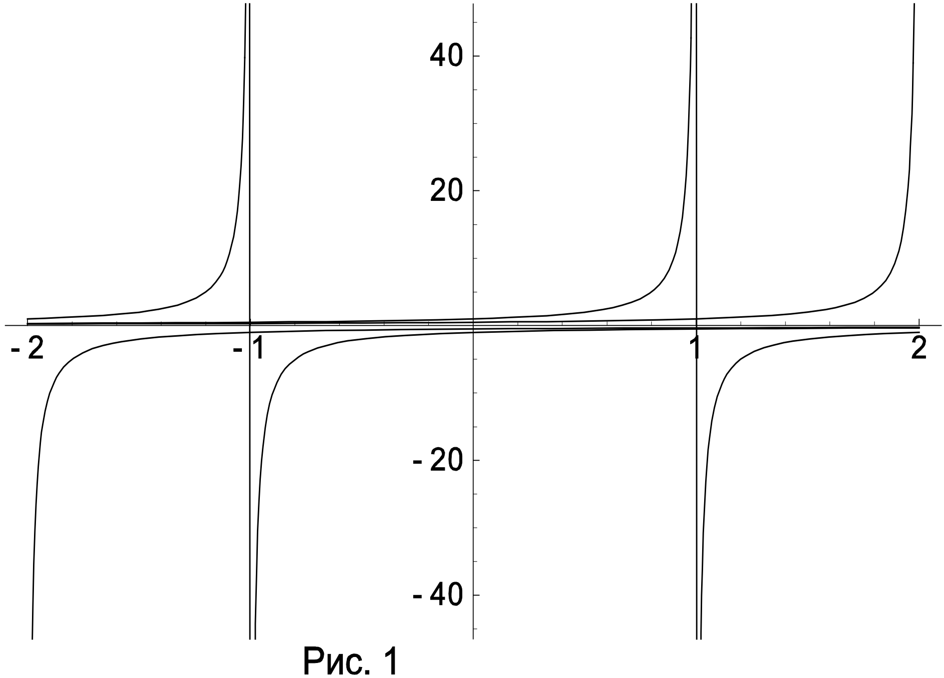


Рисунок 1 – Неустойчивое решение при x=0.

Разработаем программу реализующую поиск решения системы дифференциальных уравнений и построение фазового портрета.

```
> restart;
dy0:=diff(y(x),x$1)=x^2;
```

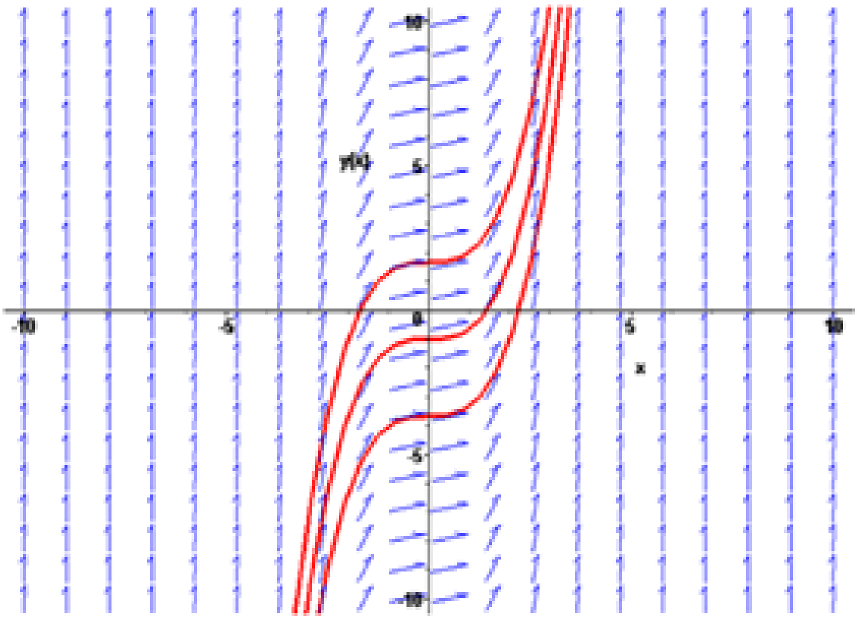
$$dy0 := \frac{d}{dx}y(x) = x^2$$

```
> dsolve(dy0,y(x));
```

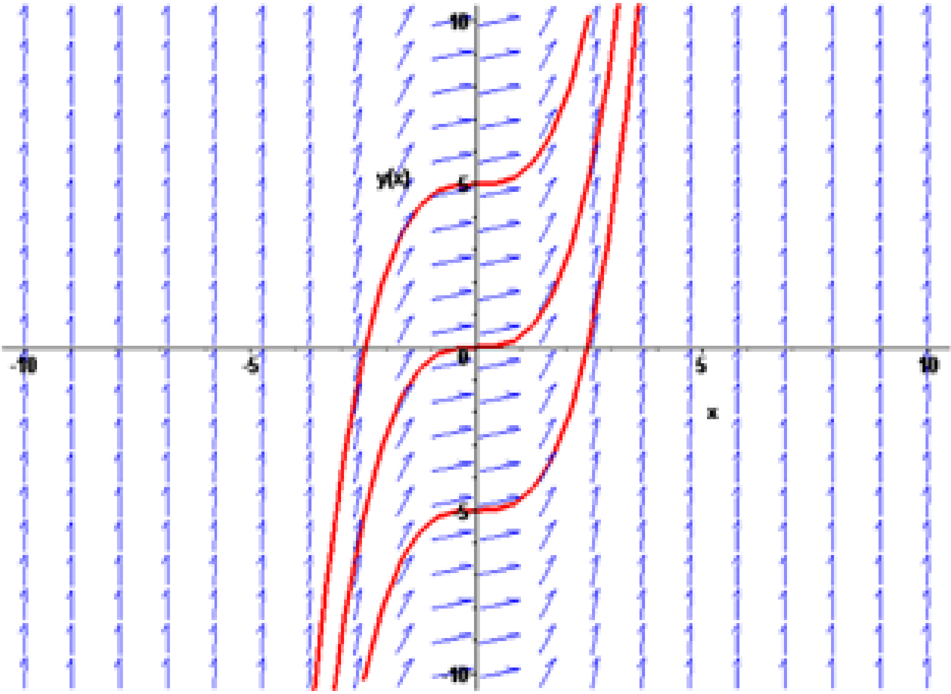
$$y(x) = \frac{x^3}{3} + \_C1$$

```
>  with(DEtools):
a:=1;b:=3;    DEplot(dy0,y(x),x=-10..10,y=-10..10,
[y(0)=-1,y(2)=-1,y(-2)=-1],
colour=blue,linecolor=[red,red,red]);
```

$$a := 1 \quad b := 3$$




```
>with(DEtools):
a:=1;b:=3;    DEplot(dy0,y(x),x=-10..10,y=-10..10,
```




```
> restart;
dy0:=diff(y(x),x$1)=1-x^2;
```

$$dy0 := \frac{d}{dx} y(x) = 1 - x^2$$

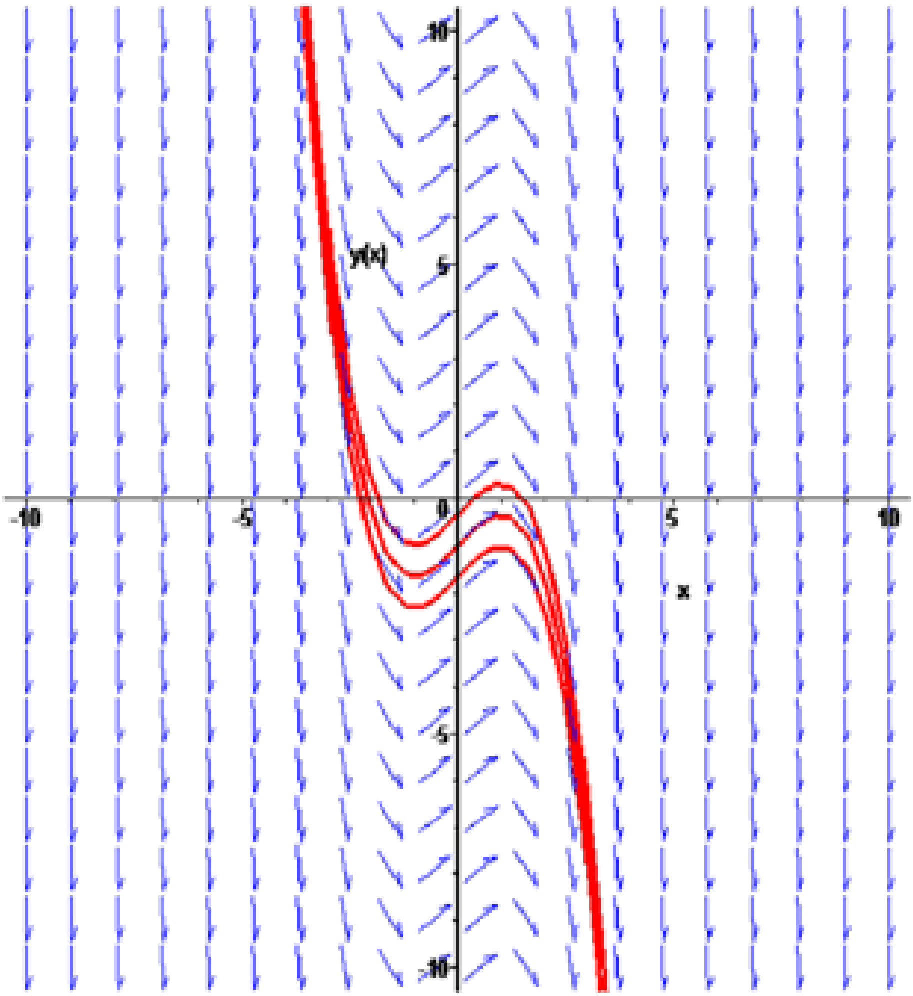
```
> dsolve(dy0,y(x));
```

$$y(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x + \_C1$$

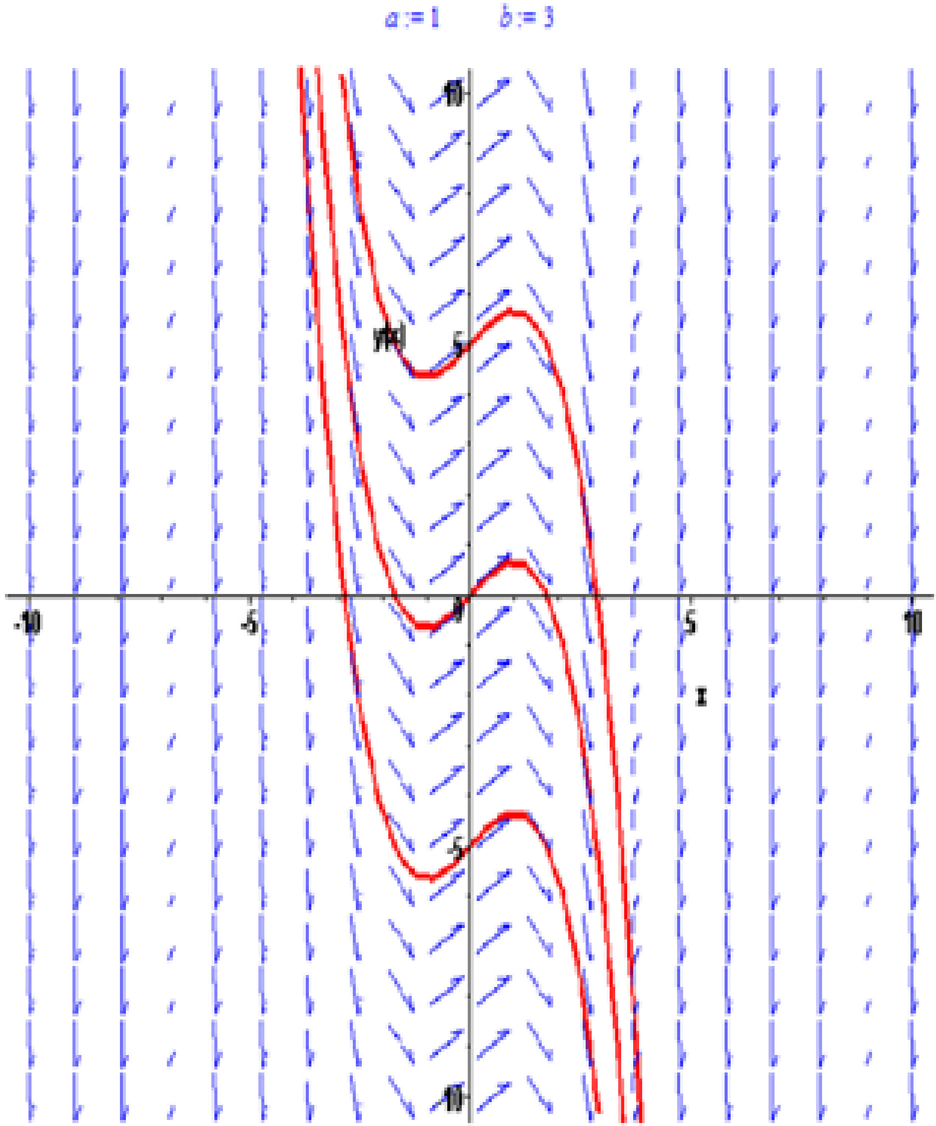
```
> with(DEtools):
a:=1;b:=3;    DEplot(dy0,y(x),x=-10..10,y=-10..10,
[y(0)=-1,y(2)=-1,y(-2)=-1],
```

```
colour=blue,linecolor=[red,red,red]);
```

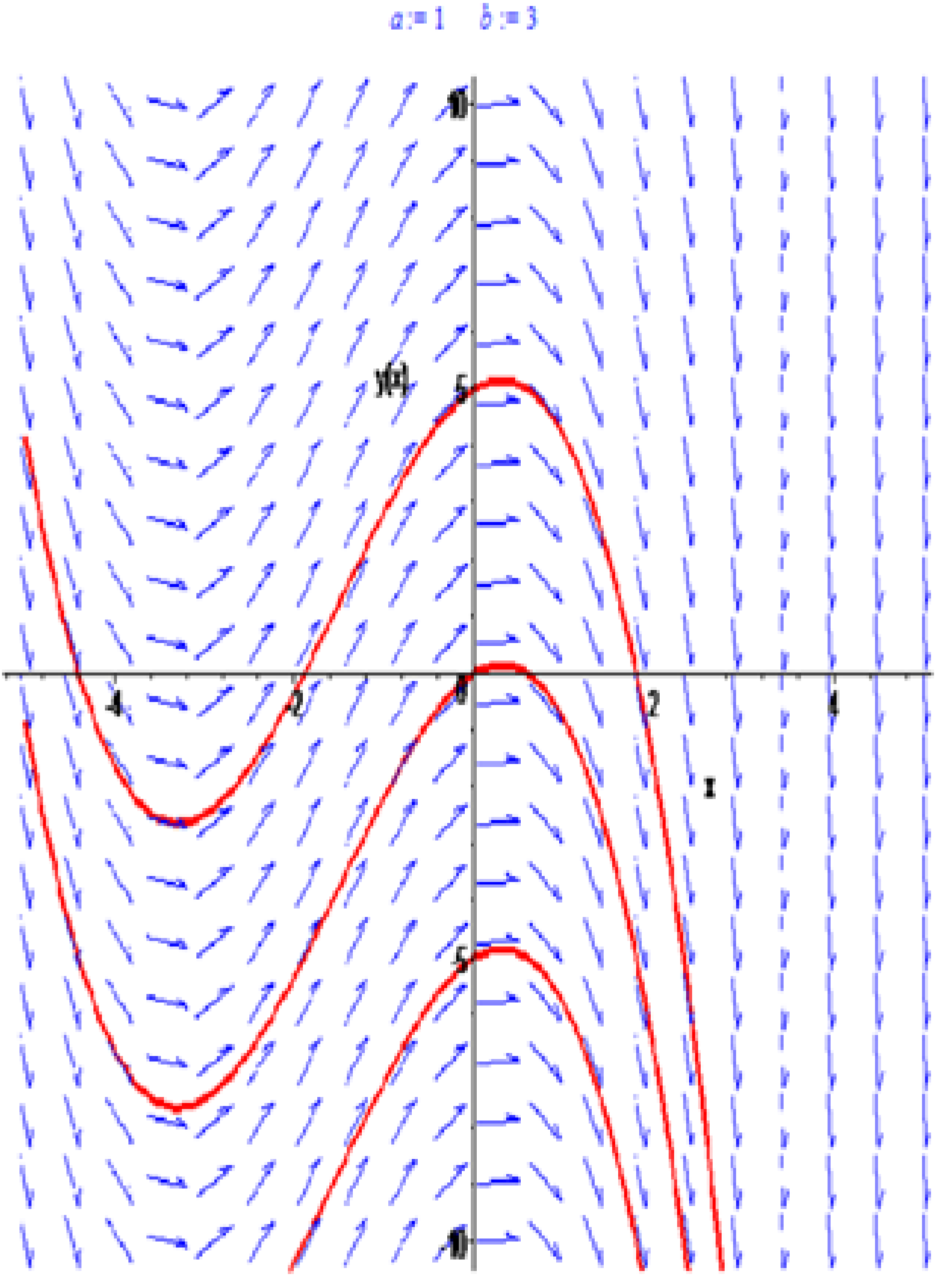
$a := 1 \quad b := 3$




```
>    with(DEtools):
a:=1;b:=3;    DEplot(dy0,y(x),x=-10..10,y=-10..10,
[y(0)=5,y(0)=0,y(0)=-5],
colour=blue,linecolor=[red,red,red]);
```




```
>    with(DEtools):
a:=1;b:=3;   DEplot(dy0,y(x),x=-5..5,y=-
10..10,[y(0)=5,y(0)=0,y(0)=-5],
colour=blue,linecolor=[red,red,red]);
```


a := 1   b := 3
y(x)
x
10
5
-5
-10
-4
-2
0
2
4

Заключение.

Данная работа посвящена построению функций Ляпунова для выявления свойства продолжимости всех решений некоторых нелинейных уравнений третьего порядка на полупрямую $[0;\infty)$.

В работе рассмотрены следующие нелинейные уравнения третьего порядка:

$$\dddot{x} + \varphi(x,\dot{x})\ddot{x} + \psi(x,\dot{x}) + f(x) = e(t),$$

$$\dddot{x} + \varphi(x,\dot{x})\ddot{x} + \psi(x,\dot{x}) + f(x) = e(t),$$

$$\dddot{x} + b\ddot{x} + \varphi(x,\dot{x}) + \psi(\dot{x}) + ax = e(t),$$

Приведенные примеры построения функций Ляпунова для выявления свойства продолжимости нелинейных уравнений третьего порядка говорят о возможности применения указанных функций не только для выяснения вопросов устойчивости, но и для выявления других свойств решений дифференциальных систем.

Литература

1. Понтрягин Л.С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4-е изд., М.: Наука, -- 1974., --- 331стр.
2. Горбунов А.Д., Некоторые вопросы качественной теории обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. М.: Учен. зап. ун-та, 165. Математика, 7 (1954), 39--78.
3. Ла-Салль Ж., Лефшец С., Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, М.: Мир, 1964г.
4. Ющенко А.А., // Доклады АН БССР, т. 11, №10, 1967г.
5. Ющенко А.А., // Дифференциальные уравнения т.4 №11, 1968г.
6. Демидович Б.П., Лекции по математической теории устойчивости, М.: Наука, 1967г.
7. Барбашин Е.А., Функции Ляпунова, М.: Наука, 1970

ПОД- СЕКЦИЯ 6. Математика.

Шевцов А.Н.
кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная математика»
Таразский Государственный университет им. М.Х.Дулати
Айтказина А.М.
ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика»
Таразский Государственный университет им. М.Х.Дулати
Абдрахимова А.Н.
студентка 4 курса, спец. «Математика»
Таразский Государственный университет им. М.Х.Дулати

ОБОБЩЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА

Рассмотрим характеристические показатели Ляпунова решения линейной системы

$$\lambda_{x(t)} = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |x(t)|,$$

где $x(t) \neq 0$ - решение линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x; \qquad (ф.1)$$

Теорема Ляпунова. Пусть

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t \|A(\tau)\| d\tau < +\infty;$$

Тогда для всякого решения $x(t) \neq 0$ системы (ф.1) характеристические показатели $\lambda_{x(t)}$ являются действительными числами (т. е. $\neq \pm\infty$).

Множество всех показателей Ляпунова ненулевых решений системы (ф.1) называют ее спектром.

Возможны следующие частные случаи:

1) Система с постоянными коэффициентами (т. е. $A(t) \equiv A(0)$). В этом случае $\lambda_i(A)$ равны действительным частям собственных значений оператора A(0).

2) Система с периодическими коэффициентами (т. е. $A(t+T) \equiv A(t), \ T > 0$). В этом случае

$$\lambda_i(A) = \frac{1}{T}\ln|\mu_i|$$

где μ_i - *мультипликаторы* системы (ф.1), занумерованные в порядке невозрастания их модулей (каждый берется столько раз, какова его кратность).

Рассмотрим систему

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y\,, \qquad (ф.2)$$

с непрерывной матрицей $A(t)$, где $t \in [t_0, +\infty)$.

Пусть $y(t)$ в общем случае комплекснозначная функция, определенная в

$$I = [t_0, +\infty)\,;$$

Q - множество положительных монотонно возрастающих непрерывных функций, определенных в I.

Определение 1: Число (или символ $-\infty$ или $+\infty$), определяемое формулой

$$\chi[y,q] = \begin{cases} \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \dfrac{1}{q(t)}\ln|y(t)| & при \quad y(t) \neq 0, t \in I, \\ -\infty & при \quad y(t) = 0, \ t \in I. \end{cases}$$

где $q(t) \in Q$, будем называть обобщенным верхним характеристическим показателем Ляпунова, иначе, обобщенным показателем $y(t)$ относительно $q(t)$ [1].

Допустим, что $q(t) = t^2$

Определение 2: Будем говорить, что система (ф.1) принадлежит классу $M_n(t^2)$, если любое ее ненулевое решение $y(t)$ имеет конечный обобщенный показатель относительно $q(t)$ [1].

Определение 3: Фундаментальная система решений и соответствующая фундаментальная матрица называется нормальной, если сумма ее обобщенных показателей наименьшая по сравнению с другими фундаментальными системами решений [3].

Определение4: Обобщенные показатели нормальной фундаментальной системы решений называются обобщенными показателями Ляпунова системы (ф.2)

ление 5: Обобщенные показатели системы (ф.2) называется устойчивыми, если для любого $\varepsilon > 0$, существует $\delta > 0$, что всякий обобщенный показатель λ_y любой возмущенный системы [1]

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)z \qquad \text{(ф.3)}$$

где $\|B(t)\| \le \delta, \;\; t \ge t_0$, удовлетворяет неравенству $\min\limits_i |\lambda_y - \lambda_i| \le \varepsilon$.

В классической теории показателей Ляпунова это понятие возникло из работы Перрона,впервые установившего, что обычные показатели могут быть неустойчивыми.

Мы, используя идею Перрона установили, что обобщенные показатели в классе $M_n(t^2)$ тоже могут быть неустойчивыми.

Доказательство основано на следующей теореме

Теорема: В классе $M_n(t^2)$ существует устойчивая система вида (ф.2) и матрица $B(t)$ удовлетворяющая условию $\|B(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$ такая, что система

$$\frac{dz}{dt} = [A(t) + B(t)]z$$

принадлежит классу $M_n(t^2)$ и является неустойчивой системой [2].

Доказательство: Чтобы доказать эту теорему, достаточно на примере показать систему, которая удовлетворяют этим условиям [1].

Пример:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -2aty_1 \\[2mm] \dfrac{dy_2}{dt} = (2t\sin\ln t + t\cos\ln t - 4at)y_2 \end{cases} \qquad \text{(ф.4)}$$

Общее решение системы получим в виде (ф.5):

$$\begin{cases} y_1 = e^{-at^2 + C_1} \\ y_2 = e^{t^2\sin\ln t - 2at^2 + C_2} \end{cases} \qquad \text{(ф.5)}$$

Если в качестве возмущающей матрицы выбрать матрицу

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-at^2} & 0 \end{pmatrix},$$

то возмущенная система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = -2atz_1 \\ \dfrac{dz_2}{dt} = (2t\sin\ln t + t\cos\ln t - 4at)z_2 + z_1 e^{-at^2} \end{cases} \qquad (\text{ф}.6)$$

Получим общее решение системы (ф.7)

$$\begin{cases} z_1 = e^{-at^2} \\ z_2 = \left(C_2 + C_1 \int e^{-t^2 \sin\ln t} dt \right) e^{t^2 \sin\ln t - 2at^2} \end{cases}$$

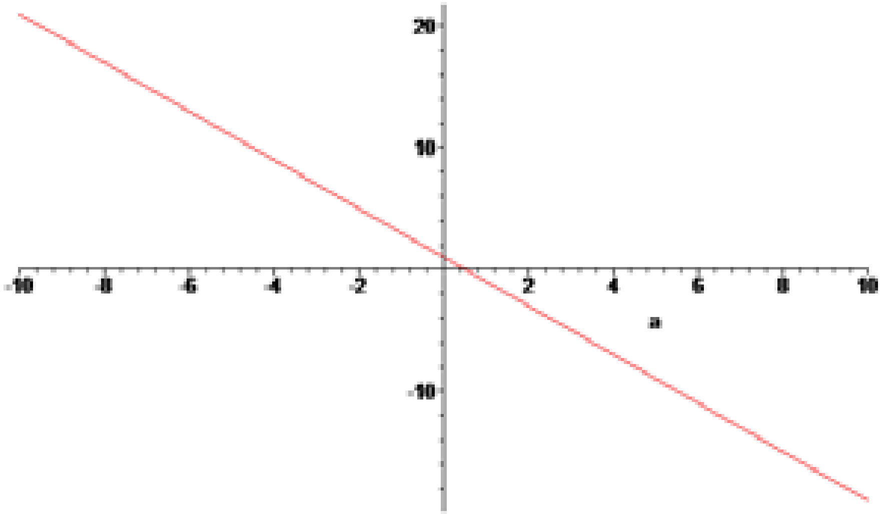
Анализируя полученные системы решений, можно сделать вывод, что решения системы (ф.4) устойчивы только в том случае, если $\tilde{N}_1 = 0$. Это условие выполняется только для тех решений, для которых $z_1(t_0) = 0$.

$$\chi[z_2] = 1 - 2a + \frac{e^{-2\pi}}{2} = 1 - 2a + \frac{1}{2e^{2\pi}}.$$

На плоскости данная функция переходит в прямую:

```
> restart;
f:=1-2*a+1/(2*exp(2*Pi));
plot(f);
```

$$f := 1 - 2\,a + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\mathbf{e}^{(2\,\pi)}}$$



Таким образом, если $z_1(t_0) \neq 0$ и параметр a такой, что имеют места неравенства

$$0 < \chi[z_2] < \frac{1}{2e^{2\pi}},$$

то решение системы

$$\frac{d}{d} = [A(t) + B(t)]z,$$

не устойчиво.

На основании полученных данных, можно сделать вывод, что обобщенные показатели в классе $M_n(t^2)$ являются неустойчивыми.

Литература

1. Демидович Б.П., Лекции по математической теории устойчивости. -М.: Наука, 1967.
2. Сулейменов Ж.С. Введение в теорию показателей Ляпунова. Алма-Ата, 1986.
3. Федорюк М.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения.-М., Наука, 1985.

ПОД- СЕКЦИЯ 6. Математика.

Шевцов А.Н.
кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная математика»
Таразский Государственный университет им. М.Х.Дулати
Жунисбеков С.
доктор технических наук, профессор, академик НИАРК, ректор
Таразского технического института

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА DELPHI

Многие задачи облачных вычислений, а также активное использование многоядерных процессоров требуют от программистов совершенствования, и внедрения многопоточных вычислений, уже на стадии разработки программ. Delphi предоставляет программисту полный доступ к возможностям программирования интерфейса Win32 и Win64 [1,с.1]. Для организации потоков предоставляется специальный класс TThread. Класс полностью упрощает программный интерфейс, предоставляя разработчику простой доступ к программированию потоков. В двух словах, все, что вам необходимо сделать, — это перекрыть виртуальный метод Execute [2-4].

Однако при попытке практической реализации можно столкнуться с целым рядом проблем, связанных со сложностью выбора потоков, правильным разбиением кода, и оценкой необходимости самих многопоточных вычислений[5-6].

Рассмотрим несколько простых циклов и алгоритмов. Разработаем программу выполняющую определенный объем вычислительной работы, точнее, расчет сумм корней из последовательно увеличивающихся индексов текущего цикла, k_1 и k_2 (рис.1.).

$$k_1 = \sum_{1}^{100\,000\,000} \sqrt{i},$$

$$k_2 = \sum_{1}^{100\,000\,000} \sqrt{i}.$$

Рассмотрим вначале реализацию этого рассчета в одном последовательном потоке, а затем при создании второго дополнительного потока.

code: Delphi

```
for I := 1 to 100000000 do
k1:=k1+sqrt(i);

for I := 1 to 100000000 do
k2:=k2+sqrt(i);
```

Рассмотрим вначале реализацию этого рассчета в одном последовательном потоке.

code: Delphi

```
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
var t : longint;
    I: Integer;
begin
t := GetTickCount;                      // Начало
k1:=0;              k2:=0;
memo1.Clear;    memo2.Clear;

for I := 1 to 100 000 000 do        k1:=k1+sqrt(i);
for I := 1 to 100 000 000 do        k2:=k2+sqrt(i);

memo1.Text:=floattostr(k1);        memo2.Text:=floattostr(k2);

t := t - GetTickCount ;
statusbar1.Panels.Items[1].Text:=        ‘Время        работы:
‘+floattostr(t/1000)+ ‘ сек.’;
label1.Caption:=statusbar1.Panels.Items[1].Text;
end;
```

Рисунок 1 - Окно программы (вып. алгоритмов в один поток).

Для создания второго потока существует несколько вариантов, принципиально отличающихся друг от друга, и как результат мы получим разное время выполнения. Рассмотрим каждый из них в отдельности, реализуем его, и оценим эффективность.

В первом случае: Создаем дополнительный поток и обращаемся к нему напрямую из алгоритма.

code: Delphi

```
Potok2:=TPotok2.Create(true);
Potok2.FreeOnTerminate:=true;
Potok2.Resume;

for I := 1 to 100000000 do
k1:=k1+exp(1/3*ln(i));
```

Причем создание можно задать как в самом алгоритме, так и в самом начале при создании формы. Причем в обоих случаях необходимо избегать последовательного расположения алгоритмов – которые мы бы хотели разделить. А значит в начале, надо запустить все доступные потоки, а уже затем основной поток в цикле.

code: Delphi

```
 procedure TPotok2.Execute;
var i:integer;
begin
for I := 1 to 100000000 do
k2:=k2+sqrt(i);
end;

procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);
var t: longint;
  I: Integer;
begin
t := GetTickCount; // Начало
k1:=0;
k2:=0;
memo3.Clear;
memo4.Clear;
Potok2.Resume;
for I := 1 to 100000000 do
k1:=k1+sqrt(i);
while not(potok2.Finished) do ;
memo3.Text:=floattostr(k1);
memo4.Text:=floattostr(k2);

t := t - GetTickCount ;
statusbar1.Panels.Items[1].Text:= 'Время работы: '+floattostr(t/1000)+ ' сек.';
 label2.Caption:=statusbar1.Panels.Items[1].Text;
end;
```

Два параллельных потока с вычислениями, независимых от основного потока в котором находится запущенная программа, создадим с помощью следующего алгоритма:

code: Delphi

```
procedure Tpotok1.Execute;  var i:integer;
begin
for I := 1 to 100000000 do     k1:=k1+sqrt(i);
end;

procedure TPotok2.Execute;  var i:integer;
begin
for I := 1 to 100000000 do     k2:=k2+sqrt(i);
end;

procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);
var t : longint;
  I: Integer;
begin
t := GetTickCount; // Начало
k1:=0;
k2:=0;
memo3.Clear;
memo4.Clear;

Potok1:=TPotok1.Create(true);    Potok1.FreeOnTerminate:=true;
Potok2:=TPotok2.Create(true);    Potok2.FreeOnTerminate:=true;
    Potok1.Resume;
    Potok2.Resume;

while not(potok1.Finished)or not(potok2.Finished) do ;
memo3.Text:=floattostr(k1);
memo4.Text:=floattostr(k2);
```

Все полученные интервалы работы разных алгоритмов создания потоков и расчетов занесем в таблицу.

№	Алгоритмы	Время выполнения (сек.)				
		1 поток	2 потока			
			Создание потока в цикле	Создание потока при создании формы	Два исполняемых потока независимых от основного потока	
					в цикле	при создании формы
1	Квадратный корень	4,15	2,106	2,122	3,634	3,588
2	Кубический корень (экспонента и натуральный логарифм)	25,413	13,167	13,213	18,783	19,391
3	Возведение в квадрат	1,825	0,453	0,484	2,886	3,51
4	Синус	11,95	6,162	6,209	9,11	9,219

Таким образом, получаем улучшение алгоритмов, причем создание 2-х потоков будет отнимать на 1,5 - 5 секунд больше, чем создание 1-го параллельного потока. Во всех случаях мы получаем уменьшение времени работы программы. А значит использование распараллеливания достаточно эффективно, при больших расчетах, и только в третьем расчете, при создании 2-х потоков, алгоритм оказался неэффективным и на создание потоков было затрачено дополнительно более 1,5 секунды. Выбор алгоритма всегда ложится только на разработчика программы, а данные исследования показывают простоту распараллеливания и необходимость их реализации во всех программах, для использования на современных многоядерных процессорах.

Литература.

1. TThread в Delphi. /Учебник по Delphi для профессионалов/ http://rusdir.blogspot.com/2010/02/tthread-delphi.html
2. Антонов А.С. Введение в параллельные вычисления.-Методическое пособие. -Москва, 2002г. -69с.
3. Создание потоков средствами класса TThread http://www.codingrus.ru/readarticle.php?article_id=1999
4. Первые шаги с TThread в Delphi http://www.codingrus.ru/readarticle.php?article_id=1999
5. Аппаратные Технологии Многоядерных Процессоров http://www.fistpgtu.ru/index.php?option=com_content&task=view&id=213&Itemid=2
6. Заплавный А.Г. Проблема эффективности применения хэш-функции MD5 с учетом современных вычислительных возможностей и параллельных вычислений. http://stavkombez.ru/conf/category/section7/

ПОД- СЕКЦИЯ 6. Математика.

Шевцов А.Н.
кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная математика»
Таразский Государственный университет им. М.Х.Дулати
Жунисбеков С.
доктор технических наук, профессор, академик НИАРК, ректор
Таразского технического института

КОМПЬЮТЕРНОЕ РЕШЕНИЕ И АНАЛИЗ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Решение многих научных и технических задач приводит к построению и интегрированию дифференциальных уравнений. В таких задачах требуется установить зависимость между переменными величинами некоторого физического, химического или другого случайного процесса и др.

При этом руководствуются следующим алгоритмом:

1. Составляют систему дифференциальных уравнений на основе условия задачи.
2. Определяют тип полученного уравнения и выбирают метод решения.
3. Находят общее решение.
4. Получают частное решение, удовлетворяющее начальным условиям.
5. Исследуют полученное решение.
6. Находят численные значения искомых величин.

Составление системы дифференциальных уравнений по условию научной или технической задачи состоит в определении математической зависимости между переменными величинами и их приращениями, в нахождении выражения для производной [1,с.1].

При составлении дифференциальных уравнений используются соответственно геометрический или механический смысл производной. Кроме того в зависимости от условия задачи, применяются соответствующие законы физики, механики, химии и других наук.

Получается, что существует большое количество разнообразных задач приводящихся к решению системы дифференциальных уравнений.

Для определенности будем рассматривать системы вида [2,с.1]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + c_1 \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases} \qquad (ф.1)$$

где $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ - некоторые действительные числа.

Решением такой системы является пара функций $x(t)$ и $y(t)$, обращающая в тождества оба уравнения системы (ф.1). Для решения системы можно применить:

1. Метод Лагранжа, вариации произвольных постоянных [3,с.1].
2. Метод интегрируемых комбинаций [4,с.436].
3. Метод Эйлера, с использованием характеристического уравнения и собственных значений [5,с.1].

В нашей работе мы будем рассматривать метод Эйлера, решения системы дифференциальных уравнений с помощью характеристического уравнения, всвязи с малой распространенностью этого метода.

Также рассмотрим методы моделирования случайных векторов в рамках многомерных распределений и рамках метода Эйлера, для моделирования случайных процессов, заданных на конечном интервале времени. Однако при формировании реализаций большой длины эти методы, как было отмечено [6,с.1], требуют большого количества вычислений и трудоемкой подготовительной работы, что затрудняет их практическое использование.

Цель исследования: Упростить методы нахождения решений, и облегчить

процесс исследования и анализа полученных решений.

Метод решения систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка (Метод Эйлера).

Линейной однородной системой с постоянными коэффициентами называется система .1]

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (ф.2)$$

где коэффициенты a_{ik} — постоянные, а $x_k(t)$— искомые функции от t.

Системy (ф.2) можно коротко записать в виде одного матричного уравнения

$$\frac{dX}{dt} = AX,$$

где A- матрица коэффициентов, а X – матрица искомых функций.

Простейшая однородная система дифференциальных уравнений имеет следующий вид [5,с.1]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k \cdot x(t) + l \cdot y(t) \\ \frac{dy}{dt} = m \cdot x(t) + n \cdot y(t) \end{cases}$$

Собственно, почти все практические примеры такой системой и ограничиваются.

Здесь:

k, l, m, n – это числа (числовые коэффициенты). В частности, один, несколько или даже все коэффициенты могут быть нулевыми.

$x(t)$ и $y(t)$ – это неизвестные функции. В качестве независимой переменной выступает переменная t.

$\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ – первые производные неизвестных функций $x(t)$ и $y(t)$ соответственно.

Найдем решение системы дифференциальных уравнений. Это значит, найдем такие функции $x(t)$ и $y(t)$, которые удовлетворяют и первому и второму уравнению системы. Как видите, принцип очень похож на обычные системы линейных уравнений. Только там корнями являются числа, а здесь – функции.

Найденный ответ записывают в виде общего решения системы дифференциальных уравнений: $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$

Для системы ДУ можно решить задачу Коши, то есть, найти частное решение системы, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Частное решение системы тоже записывают с фигурными скобками.

Более компактно систему можно переписать так:

$$\begin{cases} x' = kx + ly \\ y' = mx + ny \end{cases}$$

<u>*Рассмотрим пример:*</u>

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений [8,с.1]

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$$

Решение: Вычислим собственные значения λ матрицы А, составленной из коэффициентов заданных уравнений:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 5\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0, \quad\Rightarrow\quad (-2-\lambda)(2-\lambda)-5=0, \quad\Rightarrow$$

$$(\lambda+2)(\lambda-2)-5=0, \;\Rightarrow\quad \lambda^2-9=0, \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=3,\ \lambda_2=-3.$$

В данном примере характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня.

Найдем собственный вектор V_1, соответствующий собственному числу $\lambda_1=3$. Подставляя $\lambda_1=3$, получаем векторно-матричное уравнение для определения V_1:

$$(A-\lambda E)V_1=0.$$

Пусть собственный вектор V_1 имеет координаты $V_1=(V_{11},V_{21})^T=\begin{pmatrix}V_{11}\\ V_{21}\end{pmatrix}$

(здесь индекс Т означает операцию транспонирования). Тогда предыдущее уравнение можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix}-2-3 & 5\\ 1 & 2-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_{11}\\ V_{21}\end{pmatrix}=0, \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}-5 & 5\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_{11}\\ V_{21}\end{pmatrix}=0.$$

После перемножения матриц получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases}-5V_{11}+5V_{21}=0\\ V_{11}-V_{21}=0\end{cases}$$

Оба уравнения являются линейно зависимыми. Из второго уравнения находим соотношение между координатами собственного вектора: $V_{11}=V_{21}$. Полагаем $V_{21}=1$. Следовательно, $V_{11}=1$. Таким образом, собственный вектор V_1 имеет координаты

$$V_1=(1,\ 1)^T=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Аналогично определяем 2-ой собственный вектор V_2, соответствующий $\lambda_2=-3$. Пусть

$$V_2 = (V_{21}, V_{22})^T = \begin{pmatrix} V_{21} \\ V_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} -2+3 & 5 \\ 1 & 2+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{21} \\ V_{22} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{21} \\ V_{22} \end{pmatrix} = 0.$$

Получаем систему двух одинаковых уравнений:

$$\begin{cases} V_{21} + 5V_{22} = 0 \\ V_{21} + 5V_{22} = 0 \end{cases}$$

Отсюда находим координаты собственного вектора V_2:

$$V_{21} = -5V_{22}, \quad V_{22} = 1, V_{21} = -5.$$

Следовательно,

$$V_2 = (-5, 1)^T = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, система уравнений имеет два различных собственных числа и два собственных вектора. Общее решение выражается формулой

$$X(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \exp(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \exp(-3t) \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

где C_1, C_2 – произвольные числа.

Ответт: $$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{3t} - 5C_2 e^{-3t} \\ y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} \end{cases}$$

Разработка программы для решения систем дифференциальных уравнений и построения фазовых портретов

Разработаем программу для автоматического решения системы ДУ, по заданным условиям задачи и начальным условиям (рис.1).

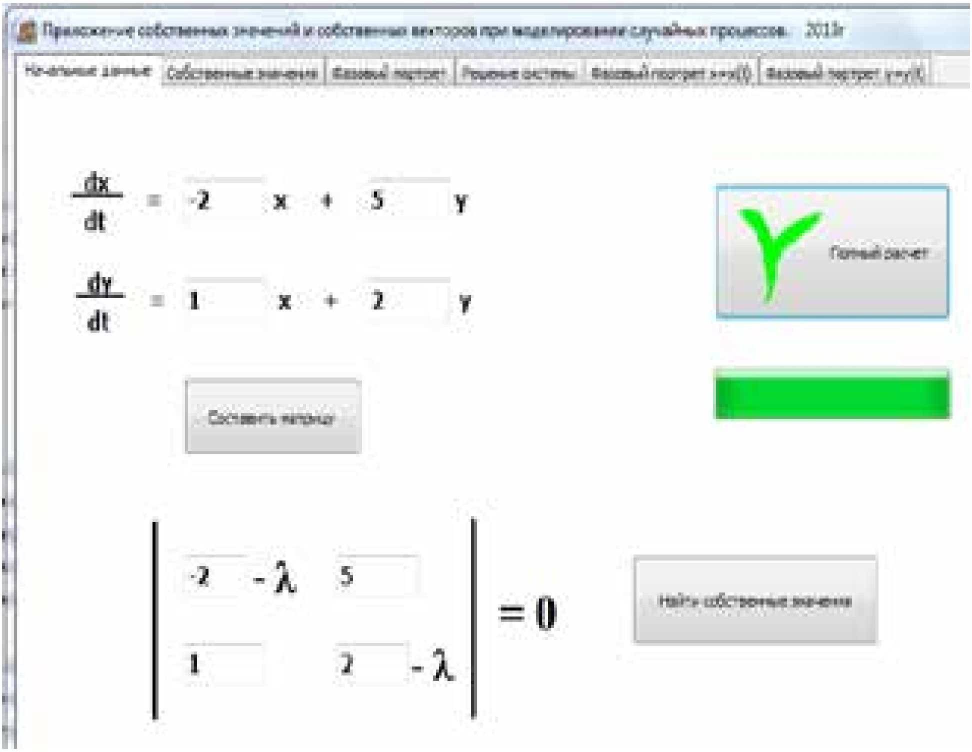


Рисунок 1 – Исходные данные задачи.

Здесь мы можем задавать начальные коэффициенты системы дифференциальных уравнений, в зависимости от условий задачи.

Далее программа автоматически составляет характеристическое уравнение и решает его (рис.2).

Определяются собственные значения, и находятся собственные вектора. А также оба собственных вектора отображаются на координатной плоскости.

Решение системы дифференциальных уравнений находится и отображается на четвертой вкладке программы в аналитическом виде (рис.3).

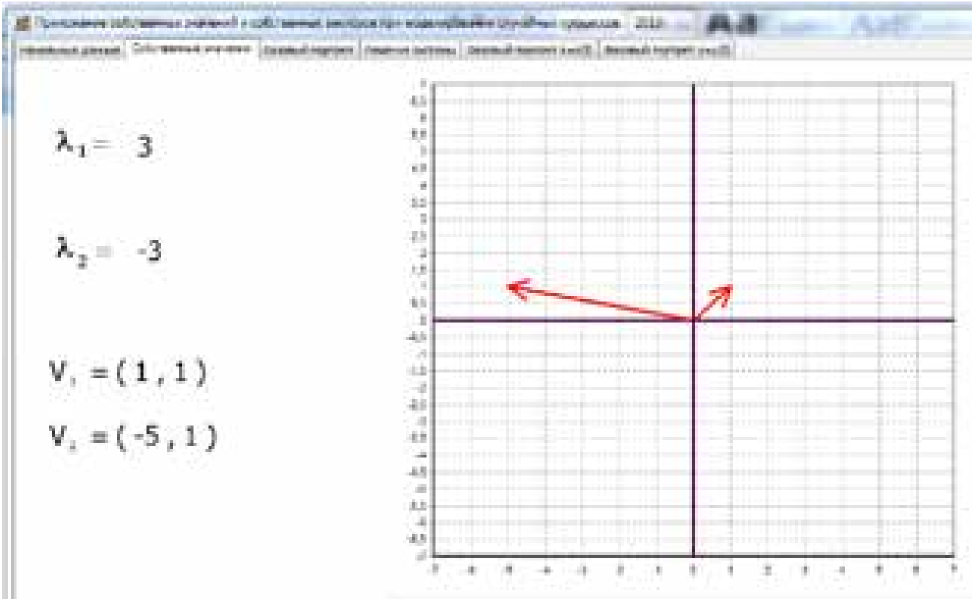


Рисунок 2 – Собственные значения и вектора.

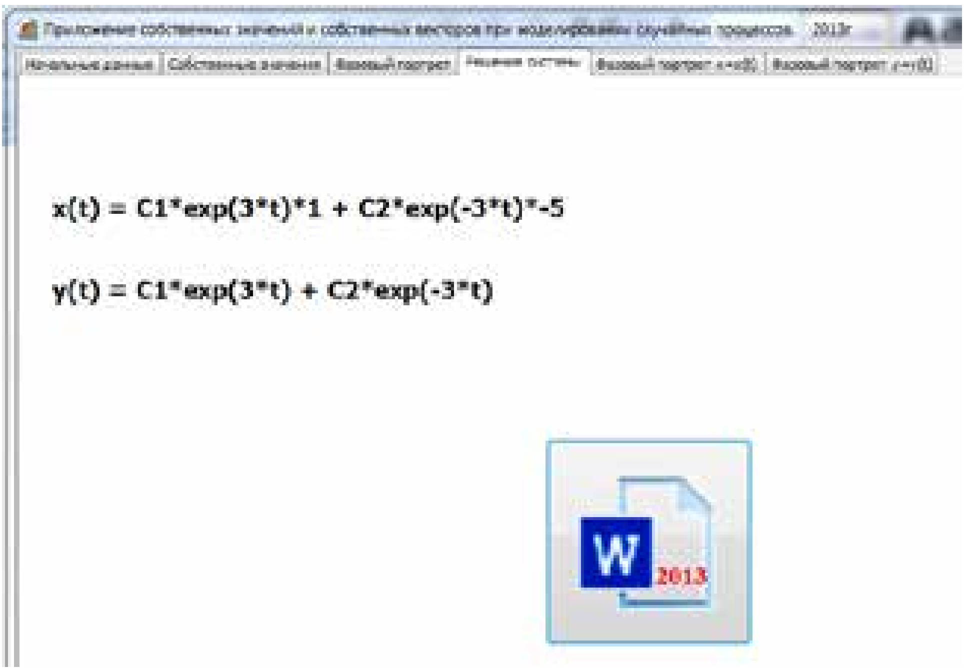


Рисунок 3 – Решение системы дифференциальных уравнений.

Построим фазовые портреты полученных решений системы дифференциальных уравнений. Варьируем переменную t в пределах от 0 до 1. А произвольные постоянные $\tilde{N}_1$ и $\tilde{N}_2$ в пределах от -10 до +10. Также зададим и некоторое частное решение и отобразим его на фазовом портрете (рис.4-7). На (рис.4) видно, что собственные вектора совпадают с асимптотическими линиями решений системы.

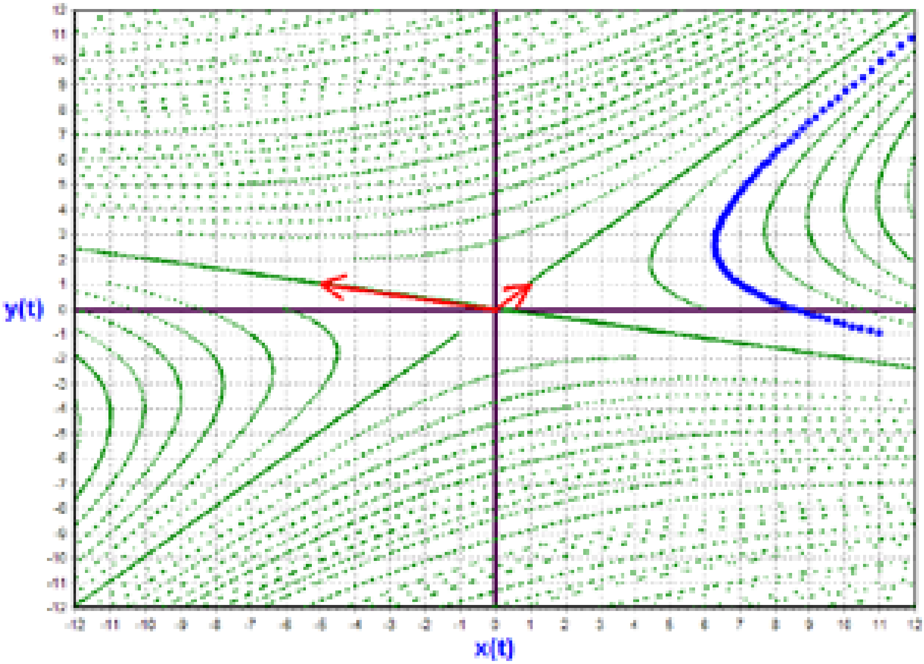


Рисунок 4 – Собственные вектора на фазовом портрете..

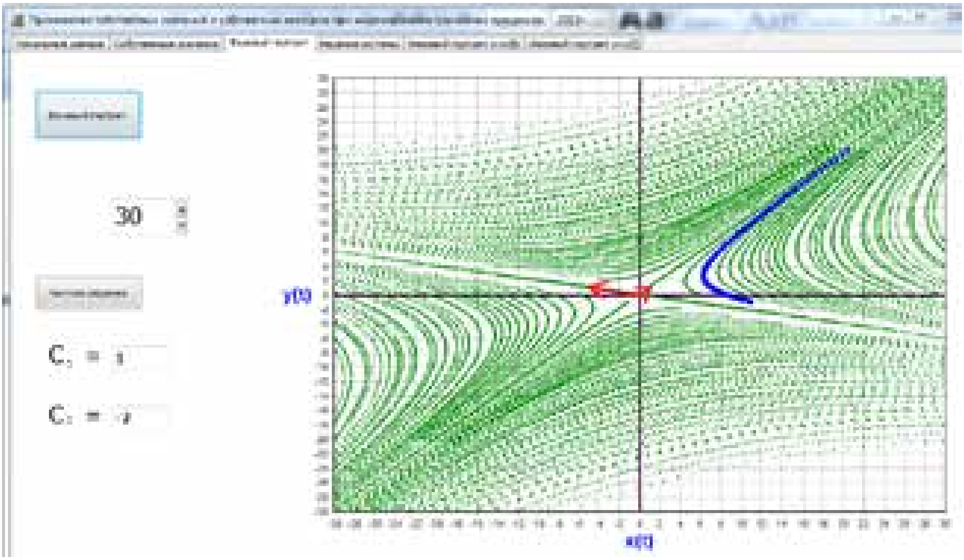


Рисунок 5 – Фазовый портрет и частное решение системы.

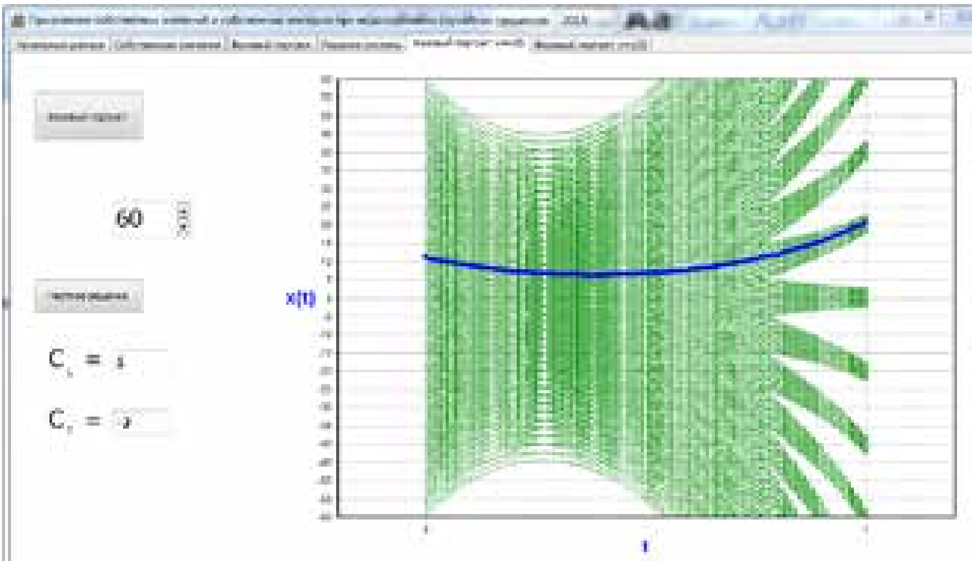


Рисунок 6 – Фазовый портрет для функции x(t).

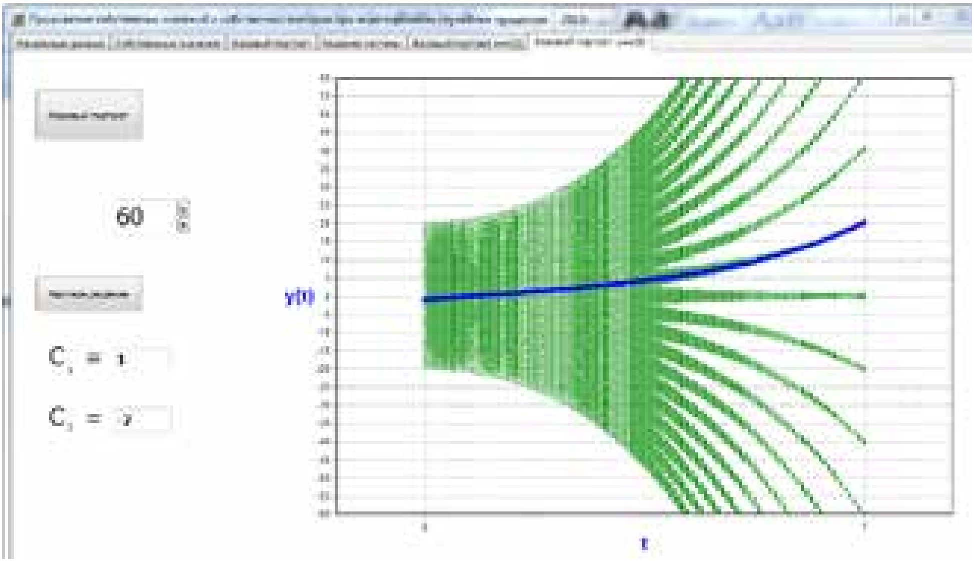


Рисунок 7 – Фазовый портрет для функции y(t).

Выводы

Для рассмотренного класса задач разработана программа позволяющая находить решение сложных систем дифференциальных уравнений и строить фазовые портреты решений. Построенны фазовые портреты, наиболее полно характеризуют решения системы и позволяют проводить исследования точек сингулярности решений, стационарных и критических точек.

Разработанные алгоритмы и программа могут быть полезны при различных исследованиях, в процессе обучения, а также при решении практических задач приводимых к системам дифференциальных уравнений, и изучении асимптотической устойчивости решений.

Литература.

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. http://matica.org.ua/spravochnik-a-a-gusak-v-m-gusak/25-5-zadachi-privodyaschie-k-differentsialnim-uravneniyam
2. Системы дифференциальных уравнений. http://www.cleverstudents.ru/combined_differential_equations.html
3. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и системы. http://www.pm298.ru/diffur8.php
4. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений. –Минск, «Вышэйшая школа», 1973. -560с.
5. Емелин А. Как решить систему дифференциальных уравнений. http://www.mathprofi.ru/sistemy_differencialnyh_uravnenij.html
6. Моделирование типовых случайных процессов. http://www.sernam.ru/book_dm.php?id=20
7. Интегрирование однородных линейных систем с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера. http://mathhelpplanet.com/static.php?p=integrirovanie-odnorodnyh-linyeinyh-sistem
8. Метод собственных значений и собственных векторов. http://www.math24.ru/method-of-eigenvalues-and-eigenvectors.html